Praktikum Wissenschaftswelt Mathematik 2012:
Unendlichkeit

Prof. Dr. Martin Ziegler, FB Mathematik der TU Darmstadt

für Leistungskurse der Edith-Stein-Schule, Eleonorenschule und Alfred-Delp-Schule

0 Zeit- und Raumplan

Di 18.9.: quantitative Unbeschränktheit und asymptotisches Wachstum

8h30-10h00 Vorlesung (S2/15-244)
10h30-11h30 Computerübung (S2/15-K313 / -K309)

13h00-14h30 Vorlesung (S2/15-244)
15h00-16h30 Gruppenübung (S2/15-244 / -51)

Mi 19.9.: Kardinalität

8h30-9h15 Besprechung der Übungen (S2/15-244 / -51)
9h30-11h00 Vorlesung (S2/15-244)
11h30-12h30 Gruppenübung (S2/15-244 / -51)

15h15-17h15 Schülernachmittag im Hexagon

Do 20.9.: Ordnungen und Ordinalzahlen

8h30-9h15 Besprechung der Übungen (S2/15-244)
9h30-11h00 Vorlesung (S2/15-244)

12h30-13h30 Vorlesung (S2/15-244)
14h00-15h00 Gruppenübung (S2/15-244)

1 Asymptotisches Wachstum

Beispiel 1 (Exkurs über Prädikatenlogik) $x|y$, $x \in \mathbb{P}$

Definition 2 *a) Eine Folge/Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ heißt* beschränkt, *wenn gilt:*

$$\exists B \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} : \quad f(n) \leq B \ .$$

b) Für $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ schreiben wir "$f \lesssim g$" wenn f/g beschränkt ist.

Beispiel 3 $5n^2 + 3 + 1/n \lesssim n^3$, $\lceil f(n) \rceil \lesssim \lfloor f(n) \rfloor$.

Beispiel 4 (Rekapitulation) *a) Falls* $\lim_n f(n)$ *existiert, so ist* f *beschränkt.*
b) Für $f(n), g(n) \to \infty$ *gilt* $\lim_n \frac{f(n)}{g(n)} = \frac{\lim_n f'(n)}{\lim_n g'(n)}$.
c) $\exp'(x) = \exp(x), \quad \ln'(x) = 1/x$
d) $e^{\ln x} = x, \quad \ln(e^y) = y.$

Aufgabe 5 *Vergleichen Sie die folgenden Funktionen hinsichtlich ihres asymptotischen Wachstums:*

i) $\sqrt[3]{n}$	*viii)* 3^{2^n}	*xv)* 2^n
ii) 2^{2^n}	*ix)* $n \cdot \ln \ln n$	*xvi)* $\ln(n)$
iii) n^3	*x)* $n^{3/2}$	*xvii)* n^n
iv) $n!$	*xi)* 2^{3^n}	*xviii)* $n \cdot \ln(n)$
v) $\sqrt{n}$	*xii)* $\exp(n)$	*xix)* n^2
vi) $n \cdot \lvert\cos(n)\rvert$	*xiii)* $\log_2(n)$	*xx)* $n^{\ln(n)}$
vii) $n \cdot \ln^2(n)$	*xiv)* $n^{\sqrt{n}}$	*xxi)* $n \cdot \lvert\sin(n)\rvert$

Können Sie sie in eine Reihenfolge bringen? Welche? Bei welchen gelingt dies nicht?

Donald Knuth verallgemeinerte 1976 Inkrementation, Addition, Multiplikation und Potenzierung. Ein alternativer Zugang aus den 1920er Jahren ist der folgende:

Beispiel 6 *Die* Ackermann-Péter-Funktion *ist induktiv wie folgt definiert:*

$$a(0,n) = n+1, \qquad a(k+1,0) = a(k,1), \qquad a(k+1,n+1) = a\big(k, a(k+1,n)\big)$$

a) Zeigen durch vollständige Induktion nach n: $a(1,n) = n+2$.
b) Zeigen durch vollständige Induktion nach n: $a(2,n) = 2 \cdot n + 3$
c) Zeigen durch vollständige Induktion nach n: $a(3,n) = 8 \cdot 2^n - 3$
d) Zeigen durch vollständige Induktion nach n: $a(4,n) = \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{\text{Höhe } n+3} - 3$

2 Kardinalität

Definition 7 *Seien* X, Y *nichtleere Mengen.*

a) Eine Abbildung $f : X \to Y$ *heißt* injektiv, *wenn gilt:*

$$\forall x, x' \in X : \quad \big(f(x) = f(x') \;\Rightarrow\; x = x'\big) \;.$$

a') Falls so eine Abbildung existiert, dann schreiben wir "$X \preccurlyeq Y$*"*
und sagen, X *habe* höchstens die Kardinalität *von* Y.

b) Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt surjektiv*, wenn gilt:*

$$\forall y \in Y \ \exists x \in X : \quad f(x) = y \ .$$

b') Falls so eine Abbildung existiert, dann schreiben wir "$X \succcurlyeq Y$"
und sagen, X habe mindestens die Kardinalität *von Y.*

c) Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt bijektiv*, wenn sie injektiv und surjektiv ist.*

c') Falls so eine Abbildung existiert, dann schreiben wir "$X \equiv Y$"
und sagen, X habe gleiche Kardinalität *wie Y.*

d) Für $d \in \mathbb{N}$ bezeichne X^d das d–fache kartesische Produkt $X \times X \times \cdots \times X$,
Y^X die Menge aller Funktionen von X nach Y;
und $\mathcal{P}(X)$ die Menge aller Teilmengen von X sowie
$X^* := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X^n$ die Menge aller endlichen Folgen von Elementen aus X.

Lemma 8 *a)* $X \subseteq Y \ \Rightarrow \ X \preccurlyeq Y$.
b) $X \preccurlyeq Y \ \Rightarrow \ Y \succcurlyeq X$.
c) $Y \succcurlyeq X \ \Rightarrow \ X \preccurlyeq Y$.
d) $X \preccurlyeq 2^X \equiv \mathcal{P}(X)$.
e) $X \equiv Y \equiv Z \ \Rightarrow \ Y \equiv X \equiv Z$.
f) $X \preccurlyeq Y \preccurlyeq Z \ \Rightarrow \ X \preccurlyeq Z$.
g) $X \succcurlyeq Y \succcurlyeq Z \ \Rightarrow \ X \succcurlyeq Z$.
h) $X' \succcurlyeq X$ *und* $Y \preccurlyeq Y' \ \Rightarrow \ Y^X \preccurlyeq Y'^{X'}$.
j) $(Z^Y)^X \equiv Z^{X\times Y}$.

Beispiel 9 (Hilbert Hotel etc.)

a) $\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\} \equiv \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3,\ldots\}$.
b) $\mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{Z}$ *und* $\{\mathtt{0},\mathtt{1}\}^* \equiv \mathbb{N}$*:*
z.B. $(b_0,\ldots,b_{d-1}) \mapsto 2^d + \sum_{j=0}^{d-1} b_j 2^j$.
c) $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \equiv \mathbb{N}$*:*
z.B. $(n,m) \mapsto 2^{n-1}\cdot(2m-1)$.
e) $\mathbb{N} \not\succcurlyeq 2^{\mathbb{N}}$.
f) $2^{\mathbb{N}} \succcurlyeq [0,1) \equiv [0,2) \succcurlyeq 2^{\mathbb{N}}$*:*
z.B. $(b_0,b_1,\ldots) \mapsto \sum_{j\geq 0} b_j 2^{-j}$.

Theorem 10 (Cantor–Bernstein–Schröder).
Wenn $X \preccurlyeq Y$ und $X \succcurlyeq Y$, dann $X \equiv Y$.

3 Ordnungsrelationen und Ordinalzahlen

Definition 11 *Sei X eine Menge.*

a) Eine Relation auf *X ist eine Teilmenge R von $X \times X$.*
b) $R \subseteq X \times X$ heißt reflexiv*, wenn gilt:* $\quad \forall x \in X : \ (x,x) \in R$.

c) $R \subseteq X \times X$ *heißt* transitiv, *wenn gilt:*

$$\forall x,y,z \in X: \quad (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R \ .$$

d) $R \subseteq X \times X$ *heißt* symmetrisch, *wenn gilt:* $\quad \forall x,y \in X: \quad (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R.$
e) R *heißt* antisymmetrisch, *wenn gilt:* $\quad \forall x,y \in X: \ (x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \Rightarrow x = y.$

Beispiel 12 *a)* $X = \mathbb{N}$ *und* $R := \{(x,x) : x \in X\}$.
b) $X = \mathbb{R}$ *und* $R := \{(x,y) : x,y \in X, x \leq y\}$.
c) $X = \mathcal{P}(U)$ *und* $R := \{(A,B) : A,B \subseteq U, A \subseteq B\}$.
d) $X = \mathcal{P}(U)$ *und* $R := \{(A,B) : A,B \subseteq U, A \preccurlyeq B\}$.
e) $X = \mathbb{N}$ *und* $R := \{(x,y) : x$ *teilt* $y\}$.
f) $X = \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ *und* $R := \{(f,g) : f \lesssim g\}$
g) *Sei* $G = (V,E)$ *ein* gerichteter Graph, *d.h. eine Menge* V *von Knoten und* $E \subseteq V \times V$ *von Kanten. Setze*

$$R \ := \ \{(x,y) : \text{ Es gibt einen Weg von } x \text{ nach } y \text{ durch Kanten aus } E\}$$

g i) G ungerichtet, *d.h.* $(x,y) \in E \Leftrightarrow (y,x) \in E$.
g ii) G kreisfrei, *d.h. für* $x \neq y$ *gibt es keinen Weg von* x *nach* y *nach* x.
h) $\tilde{R} := \{(x,y) : (y,x) \in R\}$.
j) *Sei* $X' \subseteq X$ *und* $R' := \{(x',y') : x',y' \in X', (x,y) \in R\} = R \cap (X' \times X')$.

Definition 13 *Sei X Menge mit reflexiver, transitiver, antisymmetrischer Relation R.*

a) $z \in X$ *heißt* Minimum, *wenn gilt:* $\quad \forall y \in X: \ (z,y) \in R.$
b) $z \in X$ *heißt* minimal, *wenn gilt:* $\quad \forall y \in X: \quad (y,z) \in R \Rightarrow z = y.$
c) R *heißt* total, *wenn gilt:* $\quad \forall x,y: \ (x,y) \in R \vee (y,x) \in R.$
d) (X,R) *heißt* wohlgeordnet, *wenn jede nichtleere Teilmenge* X' *ein Minimum besitzt.*

Beispiel 14 *a)* $\big\{\emptyset, \{\text{Obama}\}, \{\text{Romney}\}, \{\text{Obama}, \text{Romney}\}\big\}$ *mit* "$\subseteq$"
b) $\big\{\{\text{Obama}\}, \{\text{Romney}\}, \{\text{Obama}, \text{Romney}\}\big\}$ *mit* "$\subseteq$"
c) $\{1,2,3,4,5,6\}$ *mit* "$\leq$"
d) $\{3,5,7,9,11,13\}$ *mit* "$\leq$"
e) $\mathbb{Z}$ *mit* "$\leq$"
f) $\mathbb{N}$ *mit* "$\leq$"
g) $\mathbb{R}$ *mit* "$\leq$"
h) $[0,1]$ *mit* "$\geq$"
j) *Betrachte die Mengen* $0 := \emptyset$, $0^+ := \{\emptyset\}$, $(0^+)^+ := \big\{\{\emptyset\}, \emptyset\big\}$ *und mache induktiv aus* Y *die Menge* $Y^+ := Y \cup \{Y\}$, *versehen mit der Relation* "$\in$".

Theorem 15. *Seien* (X,R) *und* (Y,S) *wohlgeordnet. Dann sind auch folgende wohlgeordnet:*

a) *Die disjunkte Vereinigung* $Z := X \uplus Y$ *mit der Relation* $R + S := R \cup S \cup (X \times Y)$.
b) *Das kartesische Produkt* $X \times Y$ *versehen mit der lexikographischen Ordnung*

$$R \times S \ := \ \Big\{\big((x,y),(x',y')\big) \ \Big| \ \big(x \neq x' \wedge (x,x') \in R\big) \vee \big(x = x' \wedge (y,y') \in S\big)\Big\}$$

Prof. Dr. Martin Ziegler
Jonathan Weinberger und Holger Thies

Ausgabe am 18.9.2012

Praktikum Wissenschaftswelt Mathematik

Unendlichkeit, 18.-20.9.2012

Übung #1: Asymptotisches Wachstum

AUFGABE 1:
Vereinfachen Sie die folgende Ausdrücke asymptotisch für $n \to \infty$:

a) $3 \cdot n^5 + 4 \cdot n^{14/3} \cdot \sqrt{n}$

b) $6 \cdot n^3 + 2 \cdot n \cdot (n - 3n^2) + 5 \cdot \sqrt{n^3 + 6n^2 + 7n + 1}$

c) $\exp\big(3\sin(n) \cdot \ln(n)\big)$

d) $n^{\ln\ln(n)/\ln(n)}$

e) $\sqrt[n]{n}$ Tipp: umformen und de l'Hospital anwenden

f) $\left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$ Tipp: Exponentialfunktion bei Wikipedia nachschlagen.

g) $\exp\left(n \cdot e^{-n}\right)$

h) $n^n/n!$, wobei $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2$ die Fakultätsfunktion bezeichnet.
Tipp: Stirling-Approximation bei Wikipedia nachschlagen.

AUFGABE 2:

a) Beweisen Sie $\max\{n,m\} \lesssim n+m$ und $n+m \lesssim \max\{n,m\}$.

b) Gilt $2^{\lceil f(n) \rceil} \lesssim 2^{\lfloor f(n) \rfloor}$? Begründen Sie!

c) Analog für $2^{2^{\lceil f(n) \rceil}} \lesssim 2^{2^{\lfloor f(n) \rfloor}}$.

ZUSATZAUFGABE Erinnern Sie sich an die Ackermannfunktion $a(k,n)$.
Können Sie sich eine Funktion vorstellen, die noch schneller wächst als $a(n,n)$?
$a(n+1,n+1)$ oder $a\big(a(n,n),a(n,n)\big)$ bspw. zählen nicht, da dies blosse Iterierungen darstellen.
Tipp: *Busy Beaver* bei Wikipedia nachschlagen.

Prof. Dr. Martin Ziegler
Jonathan Weinberger und Holger Thies

Ausgabe am 19.9.2012

Praktikum Wissenschaftswelt Mathematik
Unendlichkeit, 18.-20.9.2012
Übung #2: Kardinalität

AUFGABE 3:

a) Sei $X \subseteq Y$. Beweisen Sie $X \preccurlyeq Y$.

b) Es gelte $Y \succcurlyeq X$. Folgern Sie $X \preccurlyeq Y$.

c) Beweisen Sie: $X \preccurlyeq 2^X \equiv \mathcal{P}(X)$.

d) $X \succcurlyeq Y \succcurlyeq Z \;\Rightarrow\; X \succcurlyeq Z$.

e) Beweisen Sie: $(Z^Y)^X \equiv Z^{X \times Y}$.

f) Beweisen Sie: $\mathbb{R} \equiv (-\pi/2, +\pi/2) \equiv (0,1)$
Tipp: Tangens-Funktion

AUFGABE 4:
Wir fixieren die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ und $\mathcal{P}\big(\mathcal{P}(\mathbb{N})\big)$ sowie $[n] := \{1,2,\ldots,n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Ordnen Sie diesen die folgenden Mengen zu hinsichtlich Kardinalität:

i) $[0,1)$

ii) $\mathcal{P}([d]), d \in \mathbb{N}$

iii) $\mathbb{R}_+$

iv) $\mathbb{C}$

v) $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$

vi) $\mathbb{R}^3$

vii) $\mathbb{C}$

viii) $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

ix) Menge aller Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten.

x) Menge aller Polynome mit Koeffizienten 0 und 1.

xi) Menge aller Polynome vom Grad $< d$ mit Koeffizienten 0 und 1.

xii) Menge aller reellen Funktionen.

ZUSATZAUFGABE

a) Sei X eine Menge. Beweisen Sie $X \not\succcurlyeq 2^X$.

b) Bezeichne U die "Menge" aller Mengen. Zeigen Sie, dass dies gar keine Menge ist!
Vergleichen Sie die Kardinalität von U mit jener von 2^U unter Berücksichtigung von Aufgabe 3a+c).

Wer sich für Mathematik und das Studium interessiert, dem sei der kostenlose *Online-Mathematik Brückenkurs* empfohlen: `http://om-bridge.de`

Prof. Dr. Martin Ziegler
Jonathan Weinberger und Holger Thies

Ausgabe am 20.9.2012

Praktikum Wissenschaftswelt Mathematik

Unendlichkeit, 18.-20.9.2012

Übung #3: Ordnungsrelationen

AUFGABE 5:

a) Zeichnen Sie einen Graphen $G_4 = ([4], E)$ mit 4 Knoten, für den Beispiel 12g) eine Wohlordnung R_4 liefert.

b) Können Sie in Aufgabe a) Kanten zu G hinzufügen oder weglassen, ohne dass sich die Wohlordnung R_4 ändert? Minimieren Sie Ihre Lösung von a), indem Sie einen Graphen mit möglichst wenig Kanten zeichnen!

c) Zeichnen Sie die Relation $R_4 + R_3$ gemäß Theorem 15a).

d) Zeichnen Sie die Relation $R_4 \times R_3$ gemäß Theorem 15b).

e) Zeichnen Sie die Wohlordnungen $\mathbb{N} + 1$, $\mathbb{N} + 2$, $\ldots$

f) Zeichnen Sie die Wohlordnung $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.